УДК 514.75

Ю. И. Шевченко

ПОЛУКАНОНИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Предложен способ задания нормальной обобщенной аффинной связности, ассоциированной с распределением. Показано, что эта связность задается тензором связности и объектом нормальной линейной связности, которые определяют ее тензоры кручения и кривизны.

Исследован полуканонический случай равенства нулю подтензора тензора связности. Введены понятия тензора невырожденности кручения и полуголономного распределения. Доказано, что при обращении тензора невырожденности в нуль полуканоническая нормальная аффинная связность вырождается в линейную. Полуголономность позволила описать полуканоническую связность без кручения с ненулевым тензором невырожденности.

In manydimensional projective space distribution of planes is considered. The way of giving normal generalized affine connection associated with the distribution is proposed. It is shown that this connection is given by connection tensor and normal linear connection object. They define its curvature and torsion tensors.

Semicanonical case is investigated when subtensor of the connection tensor vanishes. Two notions are involved: non-degeneration tensor of torsion and semiholonomical distribution. It is proved that vanishing of non-degeneration tensor implies degenerating to linear connection of the semicanonical normal affine connection. The notion of semiholonomity let us describe semicanonical connection without torsion with non-zero non-degeneration tensor.

Ключевые слова: проективное пространство, распределение плоскостей, аффинная связность, линейная связность, объект связности, тензор кривизны, тензор кручения, полуголономность.

Key words: projective space, distribution of planes, affine connection, linear connection, connection object, curvature tensor, torsion tensor, semiholonomity.

1. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, ... = \overline{1, n}$) с деривационными формулами вершин:

$$dA = \vartheta A + \omega^I A_I, \ dA_I = \vartheta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \qquad (1)$$

где ϑ — форма, играющая роль множителя пропорциональности, а формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $GP(n)$, эффективно действующей в пространстве P_n, удовлетворяют уравнениям Картана [1, с. 173]:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J. \quad (2)$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим общее, то есть неголономное распределение m-мерных плоскостей как n-параметрическое семейство S_n центрированных m-плоскостей P_m^0 ($0 < m < n$).

Замечание 1. *Распределение S_n и m-поверхность, представляемая как семейство касательных плоскостей* (см., напр., [2])*, являются наиболее исследованными подмногообразиями многообразия Беловой* [3].

Произведем разбиение значений индексов:

$$I = \{i, \alpha\}, \ i, ... = \overline{1, m}; \ \alpha, ... = \overline{m+1, n}.$$

Специализируем подвижной репер $\{A, A_i, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_i на плоскость P_m^0, причем A — в ее центр. Из деривационных формул (1_2) имеем

$$dA_i = \vartheta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha + \omega_i A. \qquad (3)$$

Формулы (1_1, 3) дают уравнения стационарности центрированной плоскости P_m^0: $\omega^I = 0$, $\omega_i^\alpha = 0$. Выбирая n форм ω^I в качестве базисных, запишем уравнения распределения S_n в виде

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iJ}^\alpha \omega^J . \qquad (4)$$

Продолжая эти уравнения, получим:

$$\Delta\Lambda_{iJ}^\alpha - \delta_J^\alpha \omega_i \equiv 0, \quad \Delta\Lambda_{iJ}^\alpha = d\Lambda_{iJ}^\alpha + \Lambda_{iJ}^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_{jJ}^\alpha \omega_i^j - \Lambda_{iK}^\alpha \omega_J^K , \qquad (5)$$

символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I. Запишем дифференциальные сравнения (5) подробнее и учтем уравнения (4):

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha \equiv 0 , \quad \Delta\Lambda_{i\beta}^\alpha - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\beta^j - \delta_\beta^\alpha \omega_i \equiv 0 .$$

Утверждение 1. *Фундаментальный объект 1-го порядка* Λ_{iJ}^α *распределения* S_n *является квазитензором, содержащим тензор* Λ_{ij}^α.

Фундаментальный тензор Λ_{ij}^α порождает тензор неголономности $N_{ij}^\alpha = \Lambda_{[ij]}^\alpha$ (см., напр., [4]) распределения S_n.

2. Внешние дифференциалы форм ω_β^α имеют вид

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^I \wedge \omega_{\beta I}^\alpha \ \ (\omega_{\beta I}^\alpha = -\Lambda_{iI}^\alpha \omega_\beta^i - \delta_\beta^\alpha \omega_I - \delta_I^\alpha \omega_\beta). \qquad (6)$$

Получили структурные уравнения $(2_1, 6)$ главного расслоения $L_{h^2}(P_n), h = n - m$, над пространством P_n с типовым слоем $L_{h^2} = GL(h)$ — линейной группой, действующей в проективном фактор-пространстве $P_{h-1} = P_n / P_m^0$. Подставим (4) распределения S_n в структурные уравнения (2_1) для форм ω^α, соответствующих слоевым формам ω_β^α:

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^I \wedge \theta_I^\alpha \quad (\theta_I^\alpha = -\Lambda_{iI}^\alpha \omega^i). \qquad (7)$$

Определение 1. *Гладкое многообразие со структурными уравнениями* $(2_1$, *7, 6) назовем обобщенным расслоением* [5] *нормальных аффинных реперов и обозначим* $A_{h^2+[h]}(P_n)$.

Замечание 2. *В* $A_{h^2+[h]}(P_n)$ *символ h заключен в квадратные скобки, так как h форм* ω^α, *которые могли бы превратиться в часть структурных форм аффинной группы* $A_{h^2+h} = GA(h)$, *входят в состав базисных форм* ω^I.

Обобщенное расслоение $A_{h^2+[h]}(P_n)$ имеет фактор-расслоение нормальных линейных реперов $L_{h^2}(P_n)$ [6].

3. Для задания обобщенной аффинной связности [7] в обобщенном расслоении $A_{h^2+[h]}(P_n)$ распространим на него прием Лумисте [8] задания групповых связностей в главных расслоениях. Преобразуем базисно-слоевые формы ω^α и слоевые формы ω_β^α расслоения $A_{h^2+[h]}(P_n)$ с помощью линейных комбинаций базисных форм

$$\tilde\omega^\alpha = \omega^\alpha - L_I^\alpha \omega^I , \quad \tilde\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta I}^\alpha \omega^I , \qquad (8)$$

коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям [7]:

$$\Delta L_I^\alpha = L_{IJ}^\alpha \omega^J , \quad \Delta\Gamma_{\beta I}^\alpha + \omega_{\beta I}^\alpha = \Gamma_{\beta IJ}^\alpha \omega^J . \qquad (9)$$

Утверждение 2. *Объект нормальной обобщенной аффинной связности* $L = \{L_I^\alpha, \Gamma_{\beta I}^\alpha\}$ *состоит из тензора связности* L_I^α *и объекта нормальной линейной связности* $\Gamma_{\beta I}^\alpha$.

Формы связности (8) удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\tilde\omega^\alpha = \tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega_\beta^\alpha + Q_{IJ}^\alpha \omega^I \wedge \omega^J , \ \ D\tilde\omega_\beta^\alpha = \tilde\omega_\beta^\gamma \wedge \tilde\omega_\gamma^\alpha + R_{\beta IJ}^\alpha \omega^I \wedge \omega^J , \qquad (10)$$

где компоненты тензоров кручения Q_{IJ}^α и кривизны $R_{\beta IJ}^\alpha$ нормальной аффинной связности выражаются по формулам [7]:

$$Q_{IJ}^\alpha = L_{[IJ]}^\alpha + \delta_{[I}^i \Lambda_{iJ]}^\alpha + (\delta_{[I}^\beta - L_{[I}^\beta)\Gamma_{\beta J]}^\alpha , \ \ R_{\beta IJ}^\alpha = \Gamma_{\beta[IJ]}^\alpha - \Gamma_{\beta[I}^\gamma \Gamma_{\gamma J]}^\alpha , \qquad (11)$$

причем альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках.

Утверждение 3. *Нормальная обобщенная аффинная связность, ассоциированная с распределением* S_n, *определяется структурными уравнениями* $(2_1$*,10), характеризующимися тензорами кручения* Q^α_{IJ} *и кривизны* $R^\alpha_{\beta IJ}$.

Замечание 3. *Тензор кривизны* $R^\alpha_{\beta IJ}$ *есть тензор кривизны нормальной линейной связности, и интересен новый объект – тензор кручения* Q^α_{IJ}.

4. С учетом уравнений (4) распределения S_n запишем дифференциальные уравнения (9_1) компонент тензора связности L^α_I подробнее

$$\Delta L^\alpha_i = \bar{L}^\alpha_{iJ}\omega^J, \quad \Delta L^\alpha_\beta - L^\alpha_i\omega^i_\beta = L^\alpha_{\beta J}\omega^J; \tag{12}$$

$$\bar{L}^\alpha_{iJ} = L^\alpha_{iJ} + L^\alpha_\beta\Lambda^\beta_{iJ}. \tag{13}$$

Утверждение 4. *Тензор связности* L^α_I *содержит подтензор* L^α_i.

Рассмотрим полуканонический случай [9] нормальной аффинной связности, когда подтензор связности L^α_i обращается в нуль

$$L^\alpha_i = 0. \tag{14}$$

Тензор связности L^α_I упрощается: $\overset{\bullet}{L}{}^\alpha_I = \{0, \overset{\bullet}{L}{}^\alpha_\beta\}$, где точка над объектом означает его рассмотрение при условии (14). Преобразование (8_1) базисно-слоевых форм ω^α производится лишь с помощью этих же форм:

$$\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha - \overset{\bullet}{L}{}^\alpha_\beta\,\omega^\beta. \tag{15}$$

Дифференциальные уравнения (12_2) принимают вид

$$\Delta\overset{\bullet}{L}{}^\alpha_\beta = \overset{\bullet}{L}{}^\alpha_{\beta J}\,\omega^J. \tag{16}$$

Утверждение 5. *В полуканоническом случае (14) тензор связности* L^α_I *сужается до тензора* $\overset{\bullet}{L}{}^\alpha_\beta$.

Можно показать, что объект (13) при условии (14) образует тензор, поэтому его возможно обратить в нуль. Это нужно сделать в полуканоническом случае (14), поскольку пфаффовы производные нуля равны нулю. Инвариантные равенства $\overset{\bullet}{\bar{L}}{}^\alpha_{iJ} = 0$ дают

$$\overset{\bullet}{L}{}^\alpha_{iJ} = -\overset{\bullet}{L}{}^\alpha_\beta\,\Lambda^\beta_{iJ}. \tag{17}$$

5. Запишем (11_1) компонент тензора кручения Q^α_{IJ} подробно:

$$\begin{aligned} &Q^\alpha_{ij} = L^\alpha_{[ij]} + \Lambda^\alpha_{[ij]} - L^\beta_{[i}\Gamma^\alpha_{\beta j]}, \quad Q^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{[\beta\gamma]} + V^\delta_{[\beta}\Gamma^\alpha_{\delta\gamma]}, \\ &Q^\alpha_{\beta i} = L^\alpha_{[\beta i]} + \frac{1}{2}(V^\gamma_\beta\Gamma^\alpha_{\gamma i} - \Lambda^\alpha_{i\beta} + L^\gamma_i\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}), \quad V^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - L^\alpha_\beta. \end{aligned} \tag{18}$$

В полуканоническом случае выполняются условия (14, 17), поэтому формулы (18) упрощаются:

$$\overset{\bullet}{Q}{}^\alpha_{ij} = \overset{*}{V}{}^\alpha_\beta\,N^\beta_{ij},\ \overset{\bullet}{Q}{}^\alpha_{\beta i} = \frac{1}{2}(\overset{\bullet}{L}{}^\alpha_{\beta i} - \overset{\bullet}{V}{}^\alpha_\gamma\,\Lambda^\gamma_{i\beta} + \overset{\bullet}{V}{}^\gamma_\beta\,\Gamma^\alpha_{\gamma i}),\ \overset{\bullet}{Q}{}^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{\bullet}{L}{}^\alpha_{[\beta\gamma]} + \overset{\bullet}{V}{}^\delta_{[\beta}\,\Gamma^\alpha_{\delta\gamma]},\ \overset{\bullet}{V}{}^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - \overset{\bullet}{L}{}^\alpha_\beta. \tag{19}$$

Из дифференциальных уравнений (16) следует $\Delta\overset{\bullet}{V}{}^\alpha_\beta \equiv 0$.

Определение 2. *Назовем* $\overset{\bullet}{V}{}^\alpha_\beta$ *тензором невырожденности кручения полуканонической нормальной аффинной связности*.

Название тензора $\overset{\bullet}{V}{}^\alpha_\beta$ оправдывается следующим рассуждением. Инвариантные равенства $\overset{\bullet}{V}{}^\alpha_\beta = 0$ в силу обозначений (20) дают

$$\overset{\bullet}{L}{}^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta, \tag{21}$$

тогда преобразование (15) приводит к нулю

$$\widetilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} = 0. \qquad (22)$$

Равенства (14, 21) записываются одной формулой

$$L^{\alpha}_{I} = \delta^{\alpha}_{I}. \qquad (23)$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае

$$L^{\alpha}_{IJ} = -\delta^{i}_{I}\Lambda^{\alpha}_{iJ}. \qquad (24)$$

Подставляя выражения (23, 24) в формулу (11_1), получим $Q^{\alpha}_{IJ} = 0$. Эти равенства также следуют из структурных уравнений (10_1) при подстановке в них нулевых форм (22).

Теорема 1. *Нормальная обобщенная аффинная связность с обобщенным символом Кронекера δ^{α}_{I} в качестве тензора связности вырождается в соответствующую линейную связность.*

6. Вернемся к полуканонической связности. Если она без кручения, то есть $\overset{\bullet}{Q}{}^{\alpha}_{IJ} = 0$, то из выражений (19) получаем равенства

$$\overset{\bullet}{V}{}^{\alpha}_{\beta} N^{\beta}_{ij} = 0, \; \overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{\beta i} = \overset{\bullet}{V}{}^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\gamma}_{i\beta} - \overset{\bullet}{V}{}^{\gamma}_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma i}, \; \overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \Gamma^{\alpha}_{\delta[\beta} \overset{\bullet}{V}{}^{\delta}_{\gamma]}. \qquad (25)$$

Определение 3. *Распределение S_n назовем t-полуголономным, если обращаются в нуль линейные комбинации компонент тензора неголономности N^{α}_{ij}, коэффициентами которых служат компоненты тензора t.*

Теорема 2. *Полуканоническая нормальная аффинная связность без кручения, ассоциированная с распределением S_n, характеризуется свойствами:*

1) распределение S_n $\overset{\bullet}{V}{}^{\alpha}_{\beta}$ — полуголономно;

2) плоскостные пфаффовы производные $\overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{\beta i}$ тензора связности $\overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{\beta}$ являются разностями линейных комбинаций компонент подобъекта $\Lambda^{\gamma}_{i\beta}$ фундаментального квазитензора Λ^{γ}_{iJ} и комбинаций подобъекта $\Gamma^{\alpha}_{\gamma i}$ объекта нормальной линейной связности $\Gamma^{\alpha}_{\gamma I}$ с коэффициентами — компонентами тензора невырожденности $\overset{\bullet}{V}{}^{\alpha}_{\beta}$;

3) альтернированные нормальные пфаффовы производные $\overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$ суть проальтернированные свертки компонент подобъекта $\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}$ объекта нормальной линейной связности $\Gamma^{\alpha}_{\delta I}$ и тензора невырожденности $\overset{\bullet}{V}{}^{\delta}_{\gamma}$.

Замечание 4. *Теорема 1 — следствие теоремы 2. В вырожденном случае $\overset{\bullet}{V}{}^{\alpha}_{\beta} = 0$, или $\overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, откуда $\overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{\beta I} = 0$, и равенства (25) суть тождества.*

Замечание 5. *Если от полуканонической связности перейти к канонической [9], когда $\overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{\beta} = 0$, тогда $\overset{\bullet}{L}{}^{\alpha}_{\beta I} = 0$, $\overset{\bullet}{V}{}^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Подстановка этих значений в формулы (25) приведет к теореме 2 работы [7].*

Замечание 6. *В общем случае $\det(\overset{\bullet}{V}{}^{\alpha}_{\beta}) \neq 0$ равенства (25_1) дают $N^{\alpha}_{ij} = 0$, и пункт 1) в теореме 2 заменяется: 1′) распределение S_n голономно.*

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

2. *Полякова К. В.* Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 2. С. 129—177.

3. *Белова О. О.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Там же. С. 29—67.

4. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—93.

5. *Шевченко Ю. И.* Общая фундаментально-групповая связность с точки зрения расслоений // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1990. № 21. С. 100—105.

6. *Омельян О. М., Шевченко Ю. И.* Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Математические заметки. 2008. Т. 84, вып. 1. С. 99—107.

7. *Шевченко Ю. И.* Нормальная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. № 39. С. 157—166.

8. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Там же. 2006. № 37. С. 179—187.

9. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

Об авторе

Ю. И. Шевченко — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта.